1. Solutions

Solution 1.

Le système (S) s'écrit $\binom{x}{y}' = A\binom{x}{y} + b$ avec la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et le second membre $b = \binom{-1}{4}$.

1. Un solution constante X_e vérifie $0 = AX_e + b$, d'où l'équilibre

$$X_e = -A^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$$

2. L'espace de solutions du système différentiel homogène $\binom{x}{y}' = A\binom{x}{y}$ est de dimension deux. La matrice A a le polynôme caractéristique

$$(1-X)(2-X) - 6 = X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4).$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres -1 et 4 avec vecteurs propres respectifs $\binom{1}{-1}$ et $\binom{2}{3}$. Ainsi les fonctions $t \mapsto e^{-t}\binom{1}{-1}$ et $t \mapsto e^{4t}\binom{2}{3}$ forment une base de de l'espace de solutions du système homogène.
Les solutions du système inhomogène s'obtiennent en ajoutant les solutions du système homogène à une solution arbitraire — par exemple à la solution d'équilibre :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \alpha e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. On cherche α et β tels que

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha e^0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve

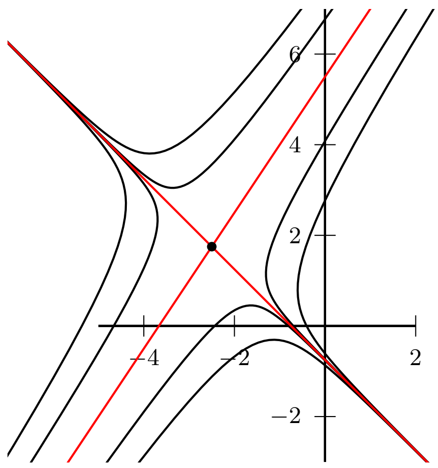
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution vérifiant le condition initiale est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -5/2 + 2e^{-t} + 3/2e^{4t} \\ 7/4 - 2e^{-t} + 9/4e^{4t} \end{pmatrix}.$$

4. Non. La solution générale ci-dessus tend vers l'infini lorsque $t \to \infty$ et $\beta \neq 0$.

5. Le point d'équilibre est un point selle (ou col). Les trajectoires ont comme asymptote la droite $X_e + \mathbb{R}\binom{1}{-1}$ quand lorsque $t \to -\infty$ et $X_e + \mathbb{R}\binom{2}{3}$ quand $t \to \infty$.



6. Le système homogène associé est le même que précédemment, dont on connaît déjà un système fondamental :

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Le second membre est maintenant $r(t) = \binom{-e^t}{-e^{-2t}}$. Ainsi une solution particulière est de la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(t)\int_0^t F(s)^{-1}r(s)\mathrm{d}s.$$

(Cela se vérifie facilement en remplaçant.) On calcule donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}\int_0^t \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^s & -2e^s \\ e^{-4s} & e^{-4s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^s \\ -e^{-2s} \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -3e^{2s} + 2e^{-s} \\ -e^{-3s} - e^{-6s} \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-3t} - t + \frac{1}{3} \\ -2e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-4t} + \frac{5}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{2t} - (1+t)e^t \\ \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{2t} - (\frac{4}{3} + 2t)e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 3\alpha e^t + \beta e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - (1+t)e^t \\ 2\alpha e^t + \beta e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t} - (\frac{4}{3} + 2t)e^t \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On peut également y arriver par la méthode de variation des constantes.

7. *Première méthode :* Parmi tous les systèmes fondamentaux, e^{tA} est caractérisé par sa normalisation : en $t = 0$ il vaut la matrice identité. Il coïncide donc avec le système fondamental

$$\begin{aligned}
F(t)F(0)^{-1} &= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : La matrice de passage $P = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ diagonalise A : $P^{-1}AP = D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{PtDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8. Avec la formule $X(t) = e^{tA}(\text{vecteur initial} - X_e) + X_e$ on retrouve

$$X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18e^t + 11e^{2t} + 8 \\ -12e^t + 11e^{2t} + 3 \end{pmatrix}.$$