Interrogation du 16 mars 2016 (MA421)

Durée : 1h30. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Question de cours. On considère une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui admet une dérivée partielle continue par rapport à sa deuxième variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives telle que

$$|f(t, x)| \leq a(t)(1 + |x|), \quad \forall x, \quad \forall t.$$

Enoncer sans preuve le lemme de Gronwall et en déduire que la solution maximale de l'équation différentielle (E), complétée par la condition de Cauchy $x(t_0) = x_0$, est globale.

Exercice. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2\,y(t) - 1 \\ y'(t) = 3\,x(t) + 2\,y(t) + 4. \end{cases}$$

(1) Déterminer son équilibre.

(2) Déterminer toutes ses solutions.

(3) Calculer la solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

(4) Le point d'équilibre est-il asymptotiquement stable ?

(5) Tracer le diagramme des phases du système différentiel (S).

(6) Déterminer toutes les solutions du système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2\,y(t) - \mathrm{e}^{t} \\ y'(t) = 3\,x(t) + 2\,y(t) - \mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

(7) Calculer l'exponentielle de matrice e^{tA} avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(8) Retrouver la solution de la question (3) en utilisant l'expression de e^{tA} obtenue et la formule générale des solutions de (S) (vue en cours)

$$X(t) = e^{tA} X_0 + X_e$$

où X_e est le point d'équilibre de la question (1).