Université de Versailles Saint Quentin
UE MA100BIO
Année 2017–2018

Feuille de TD 4 : Matrices

Exercice 1 -

1. Dans l'exercice 12 de la feuille de TD sur les suites, montrer qu'il est possible de décrire à l'aide d'une matrice l'évolution de ces deux populations.
2. Est-il possible de décrire le *modèle proie-prédateur* (feuille de TD sur les suites, Exercice 14) à l'aide d'une relation matricielle ?

Exercice 2 -
Un éleveur de bovins dispose en hiver de trois aliments (foin, ensilé, farine) contenant des éléments nutritifs A, B ou C considérés comme indispensables pour leur alimentation. Le tableau ci-dessous donne pour chaque kilo d'un des aliments le nombre d'unités A, B et C contenus.

	Foin	Ensilé	Farine
A	1	1	1
B	1	1	0
C	0	1	1

1. On note q_1, q_2 et q_3 la quantité de chaque aliment. Écrire la relation matricielle permettant de calculer à partir de (q_1, q_2, q_3) le nombre total d'unités A, B et C obtenus.
2. Chaque animal doit quotidiennement disposer de 6 unités de A, 3 unités de B et 5 unités de C. Déterminer la quantité de chaque aliment nécessaire à son alimentation.

Calcul matriciel

Exercice 3 -
On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices A vérifiant $AB = C$.
2. Calculer, si possible, BC et AC.

Exercice 4 -
Si A est une matrice de taille (m, n) de coefficient $a_{i,j}$, alors la transposée de A notée ${}^tA$ ou A^t est la matrice B de taille (n, m) et de coefficient $b_{i,j} = a_{j,i}$.

1. Calculer la transposée des matrices données dans l'exercice précédent.
2. On donne $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A \cdot {}^tA$ et ${}^tA \cdot A$.

Exercice 5 -

Soient A et B les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à calculer A^n et B^n pour n entier naturel quelconque.

1. Calculer A^2, B^2, A^3, B^3 etc. Qu'en déduisez-vous sur la question posée ?

2. Les calculs suivants vont permettre d'obtenir simplement A^n et B^n. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer PQ et QP.

   b) Calculer $M = QAP$ et $N = QBP$.

   c) Calculer alors M^n et N^n (avec n entier naturel). En déduire A^n et B^n.

Exercice 6 -

On considère le système :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z + 3t = -6 \\ 2x + y + z - 4t = 3 \\ 2x - y + 4z + t = 10 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}.$$

1. Déterminer la matrice M du système.

2. Résoudre ce système puis vérifier le résultat obtenu par un calcul matriciel.

Exercice 7 -

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 10 & 21 \\ -30 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 -

1. Déterminer l'inverse des matrices suivantes si elles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant des matrices A, B et C. Que remarque-t-on ?

3. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -4 \\ -x - 3y - 3z = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 6x - 5y = -4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$.

4. Vérifier que le système $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ -x - 2y - 4z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases}$ admet une infinité de solutions.

Exercice 9 -

Trouver, si elle existe, la matrice inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d éléments de $\mathbb{R}$.

Diagonalisation

Exercice 10 -

On dit qu'une matrice carrée est diagonale lorsque les éléments qui ne sont pas sur sa diagonale sont nuls.

1. Donner des exemples de matrices diagonales.
2. Sur des exemples, étudier les produits AD et DA d'une matrice diagonale D et d'une matrice carrée A.

Exercice 11 -

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 14 \\ 6 & -3 & -16 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer le produit de A par les 3 vecteur-colonnes $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On appelle P la matrice dont les colonnes sont les 3 vecteurs ci-dessus.
   a) Quel est le produit AP ?
   b) Vérifier que ce produit peut s'écrire PD où D est une matrice diagonale ?
   c) En déduire une expression de A en fonction de P et D.
3. Calculer A^{10}.

Exercice 12 - *(Extrait de l'examen de juin 2009)*

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-\lambda \end{pmatrix}$ où λ est un nombre réel.
   Ce déterminant est appelé ***polynôme caractéristique*** *de la matrice M. On le note $p_M(\lambda)$.*
   b) Calculer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme caractéristique avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
   Ces deux nombres sont appelés ***valeurs propres*** *de M.*

2. a) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   b) Calculer PDP^{-1} avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 -

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 \\ 0,15 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. On veut trouver des réels λ tels que le système $MX = \lambda X$ n'admette pas comme seule solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Ecrire ce système $MX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis calculer son déterminant $p(\lambda)$.

   b) En déduire deux réels λ_1 et λ_2 et deux vecteurs X_1 et X_2 non nuls tels que $MX_1 = \lambda_1 X_1$ et $MX_2 = \lambda_2 X_2$.
   Ces deux vecteurs X_1 et X_2 sont appelés ***vecteurs propres*** *associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.*

   c) Trouver une matrice diagonale D et une matrice P telle que $M = PDP^{-1}$.
   On dit qu'on a ***diagonalisé*** *la matrice M.*

2. À partir de ces calculs, retrouver les résultats du problème ci-dessous déja étudié dans la feuille de TD sur les suites :

   On considère deux populations A et B dont l'effectif total est supposé être constant et égal à 100 000 habitants. Chaque année, 15% de la population A rejoignent la population B et 10% de la population B rejoignent la population A. Etudier l'évolution de ces deux populations.

Exercice 14 -

On considére la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice A.

2. *Application.* On considère trois suites, (u_n), (v_n), (w_n) données par $w_0 = 1$, et $v_0 = u_0 = 0$, et le système:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4} w_n \\ v_{n+1} = -v_n + \frac{3}{4} w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n \end{cases}$$

   Déterminer en fonction de n le terme général des trois suites.

Exercice 15 -

Diagolaniser la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Application. Déterminez en fonction de n le terme générale de la suite (u_n) définie par $u_0 = -u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -\frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2} u_{n+1}$.

Exercice 16 -

On désire résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1' + 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_2' - x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = 4$. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

On note X' le vecteur dérivé de X, c'est-à-dire

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix},$$

1. Ecrire le système sous la forme $X' = AX$.
2. Écrire la matrice A sous la forme PDP^{-1}.
3. On pose alors $Z = P^{-1}X$.
   (a) Calculer $Z(0)$.
   (b) Ecrire une relation entre Z' et Z. On admettra que $(P^{-1}X)' = P^{-1}(X')$.
   (c) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
   (d) En déduire $X(t)$. Conclure.

Exercice 17 -

On désire résoudre l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et on note Y' le vecteur dérivé de Y, c'est-à-dire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire l'équation (E) sous la forme matricielle $Y' = AY$.
2. Écrire la matrice A sous la forme PDP^{-1}.
3. On pose alors $Z = P^{-1}Y$.
   (a) Calculer $Z(0)$.
   (b) Ecrire une relation entre Z' et Z. On admettra que $(P^{-1}Y)' = P^{-1}(Y')$.
   (c) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
   (d) En déduire $Y(t)$ et donc $y(t)$.
   (e) Comparer avec le résultat obtenu à la question a) de l'exercice 5 sur les équations différentielles (feuille de TD 2).

Quelques applications

Exercice 18 -

Une population cellulaire est composée de deux types de cellule a et b.
Cette population évolue de la manière suivante : à chaque unité de temps chaque cellule de type a se transforme en cellule de type b et chaque cellule de type b survit et donne naissance à deux cellules de type a.
On note a_n le nombre de cellules a à l'instant n, b_n le nombre de cellules b à l'instant n et t_n le nombre total de cellules à l'instant n.

1. Représenter l'évolution de cette population sur 5 générations à l'aide d'un *arbre* en partant d'une population à une seule cellule : d'abord dans le cas où cette cellule est de type a puis dans celui ou elle est de type b.

2. $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ représente l'état de la population à l'instant n.

   a) Déterminer une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout entier n.

   b) Exprimer alors X_n en fonction de X_0, M et n.

3. Etudier l'évolution d'une population dont, initialement, le nombre de cellules a est égal au nombre de cellules b (par exemple $a_0 = b_0 = 1$).

   Déterminer le vecteur-population X_n au bout de n unités de temps.

4. a) Diagonaliser la matrice M.

   b) Calculer M^n et en déduire a_n et b_n. Vérifier avec les résultats obtenus à la question 1.

5. Etudier l'évolution de cette population lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 -

Dans une population les individus sont classés selon leur génotype par rapport à un certain caractère indépendant du sexe : AA, Aa et aa.
A chaque génération, on croise systématiquement les individus obtenus avec des individus de type Aa de l'autre sexe.

1. Pour chacun des 3 types de croisement, calculer la probabilité d'obtenir un des types AA, Aa ou aa.

2. On part d'une population dont les effectifs des types AA, Aa et aa sont respectivement m_0, n_0 et p_0.

   a) Déterminer les effectifs m_1, n_1 et p_1 des 3 types de la première génération.

   b) On note X_i le vecteur-colonne correspondant aux effectifs de la $i^{ème}$ génération. Exprimer les résultats précédents sous forme matricielle en exprimant X_1 et X_2 en fonction de X_0.

   c) Quel résultat obtient-on avec $m_0 = n_0 = p_0 = 100$?

3. a) Expliquer pourquoi on peut écrire $X_{i+1} = MX_i$ où M est une matrice carrée. Quelle est la matrice M ?

   b) Exprimer ensuite X_i en fonction de X_0.

4. Diagonaliser M.

5. Vers quel état stationnaire va évoluer cette population ?

Exercice 20 -
Le mathématicien Fibonacci a étudié en 1202 la croissance d'une populations de lapins. Pour cela, il a supposé que seuls les lapins âgés de deux mois ou plus pouvaient procréer et que tout couple de lapins en âge de procréer donnait naissance à un nouveau couple de lapins chaque mois. L'objectif est de savoir, partant d'un couple de lapins nouveaux-né, combien de couples de lapins il y aura au n-ème mois.
On note u_n le nombre de couples de lapins au début du mois n et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) Montrer que pour tout entier n, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que pour tout entier n, on a $X_{n+1} = MX_n$, et en déduire l'expression de X_n en fonction de X_0, M et n.
3. Diagonaliser M.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.