Université de Versailles Saint Quentin
MA100bio
Année 2017–2018

Feuille de TD 2 : Equations différentielles

Exercice préliminaire -

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = 1 - 3x + 3x^5 + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x} + e^x$ b) $f(x) = e^{-3x}$

   c) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ d)$f(x) = xe^{x^2}$ e) $f(x) = \sin x \, \cos x$

   f) $f(x) = x^3(x^4 - 7)$ g) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$

2. Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - x} = -x^2 + 2x + 2 - \dfrac{1}{1-x}$.
   En déduire une primitive de f.

Partie A. Des calculs pour s'entraîner.

Exercice 1 -

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y' - 5y = 0$ b) $3y' + \frac{1}{2}y = 0$

   c) $2y' = 3y$ d) $-4y' + y = 0$

2. Pour chaque équation différentielle, donner la solution y_1 vérifiant $y_1(0) = 1$ puis la solution y_2 vérifiant $y_2(2) = -1$.

Exercice 2 -

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y' - 2y = 1$ b) $2y' + \frac{1}{2}y = x + 1$

2. Résoudre :
   a) $y' + y + e^x = 0$ avec $y(0) = -1$ b) $y' + 3y = 6x + 11$ avec $y(0) = -1$

Exercice 3 -

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + xy = 0$, puis en déduire les solutions de $y' + xy = x$.

2. (a) Résoudre $y' + \frac{y}{x^2} = 0$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) Vérifier que la fonction y_p définie sur $]0, +\infty[$ par $y_p(x) = 5x^2+2$ est solution sur $]0, +\infty[$ de $y' + \frac{y}{x^2} = 10x + 5 + \frac{2}{x^2}$.
   (c) En déduire les solutions sur $]0, +\infty[$ de $y' + \frac{y}{x^2} = 10x + 5 + \frac{2}{x^2}$.

3. Résoudre $xy' + (1 + x^2)y = (x^2 + x + 1)e^x$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 4 - *Une équation différentielle non linéaire.*
On veut résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + xy^2$.

1. Poser $z = \dfrac{1}{y}$ et écrire l'équation différentielle vérifiée par z.

2. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par z et en déduire l'expression de y.

Exercice 5 - *Équations différentielles du second ordre.*
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 4y' + 3y = 0$ b) $y'' - 6y' + 9y = 0$ c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

Partie B. Applications.

Exercice 6 -
On considère un système à deux compartiments C_1 et C_2 .
A l'instant $t = 0$, on introduit une quantité y_0 d'une substance dans C_1 ; cette substance peut passer ensuite dans le compartiment C_2 vide au départ mais elle ne peut pas revenir dans C_1.

1. Etude du compartiment C_1
   On suppose qu'à chaque instant t, la vitesse de passage de la substance est proportionnelle à la quantité y_1 présente dans C_1 .

   (a) Quelle est l'équation différentielle décrivant ce phénomène ?
   (b) En déduire la fonction $t \mapsto y_1 = f(t)$.

2. Etude du compartiment C_2
   Quelle est la quantité $y_2 = g(t)$ de substance présente dans le compartiment C_2 à l'instant t ?

3. A quel moment les deux compartiments contiendront-ils la même quantité de substance ?
   Application numérique : choisir comme constante de proportionnalité $\frac{\ln 2}{10}$.

Exercice 7 -
Au début de la croissance, le poids de certaines plantes varie proportionnellement à lui même. Pour une espèce particulière de coton, le poids P (en g) varie en fonction du temps (en jour) selon l'équation

$$P'(t) = 0.18P(t).$$

Sachant que $P(0) = 2$. Calculer $P(30)$.

Exercice 8 -
Le nombre de noyaux $N(t)$ d'un corps radioactif est fonction du temps t (exprimé en années). La fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ où λ est la constante radioactive de ce corps.

1. Déterminer $N(t)$ en fonction de λ, t et N_0 nombre de noyaux à l'instant $t = 0$.
2. La période radioactive ou demi-vie d'un corps radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux se désintègrent ; déterminer la constante radioactive du carbone 14 dont la période est de 5570 ans.
3. On a retrouvé dans une carrière volcanique du bois fossile pris dans les projections d'un volcan suite à une éruption ; sa teneur en carbone 14 est égale à 35% de celle du même bois non fossilisé ; déterminer la date de cette éruption volcanique.
4. Dans un article du 8 mars 2005 (site web de RFI), on pouvait lire : "Des scientifiques américains et éthiopiens viennent de découvrir un squelette vieux de 3,8 à 4 millions d'années dans la région Afar, au nord-est de l'Ethiopie, dont les caractéristiques permettent d'établir qu'il appartenait à un hominidé. Cette découverte pourrait donner de nouveaux indices sur l'évolution de l'humanité et sur le passage à la bipédie".

   Pensez-vous que la datation de ce squelette ait été faite au carbone 14 ?

Exercice 9 -
Dans un organisme, le métabolisme d'une certaine substance S est supposé vérifier

$$S'(t) = Q(t) - aS(t),$$

où $Q(t)$ est la quantité ingérée à l'instant t et a une constante réelle positive. On suppose que $Q(t)$ augmente linéairement avec le temps, c'est-à-dire

$$Q(t) = bt + c,$$

avec $b > 0$ et $c \geq 0$.
Trouver l'expression de $S(t)$ en fonction de t et de a, b, c et $S(0)$.

Exercice 10 -

En 1934, Ludwig von Bertalanffy propose un modèle pour décrire la croissance de plantes à l'aide d'une équation différentielle *(équation de croissance de von Bertalanffy).* Il fait l'hypothèse que la croissance d'une plante est proportionnelle à la différence entre sa taille L et sa taille maximale L_∞. On note k la constante de proportionalité, appelée aussi taux de croissance de la plante.

1. (a) Écrire l'équation de croissance de von Bertalanffy.

   (b) Résoudre cette équation en notant L_0 la taille initiale (avec $0 \leq L_0 < L_\infty$) et vérifier que L_∞ est bien la taille maximale.

2. Une espèce de maïs a une taille maximale de 1,80 m et il atteint la moitié de cette taille 15 jours après être sorti de terre.

   (a) Déterminer à l'aide du modèle ci-dessus la taille de ce maïs en fonction du nombre de jours.

   (b) En combien de temps aura-t-il atteint 99% de sa taille maximale ?

Exercice 11 -

Pendant une période entre le temps $t = 0$ et le temps $t = t_1$, on admet que le poids p d'un organisme est en croissance exponentielle de taux k.

1. (a) Quelle est l'équation différentielle permettant de décrire cette hypothèse ? Résoudre cette équation en notant p_0 le poids au temps $t = 0$.

   (b) On suppose que $p_0 = 1$ g et qu'au temps $t = t_1 = 10$ jours, le poids est égal à $2,718$: quel est le taux de croissance ?

   (c) Faire un graphique représentant la fonction $t \mapsto p(t)$.

2. (a) Indiquer pourquoi le modèle ci-dessus ne peut être approprié sur une longue période.

   (b) Afin de tenir compte du ralentissement de la croissance, on propose l'équation différentielle suivante pour décrire l'évolution :

   $$p' = kp - ap^2 \text{ où } k \text{ et } a \text{ sont des réels strictement positifs.}$$

   Résoudre cette équation avec $p_0 = 1$. *Indication :* on pourra pose $z = \frac{1}{p}$.

   (c) Etudier les variations de la fonction p et indiquer pourquoi on peut supposer que $k > a$.

   Représenter p avec $k = 0,1$ et $a = 0,0005$.

Exercice 12 -

Pour rendre compte de la croissance d'une population dans un environnement limité, plusieurs modèles ont été proposés sous forme d'équations différentielles.
On veut donc déterminer en fonction du temps t la population $N(t)$ avec $N_0 = N(0)$.

1. Le modèle de P.F. Verhulst (vers 1840) est l'équation différentielle $y' = ry(1 - \frac{y}{k})$ où r et k sont des constantes positives.
   (a) Résoudre cette équation en choisissant comme fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$.
   (b) Etudier la solution $t \mapsto N(t)$ et représenter cette fonction.
   Remarque : la courbe obtenue, appelée **courbe logistique,** est une *sigmoïde.*
2. Le modèle de Gompertz (1825) est l'équation différentielle $y' = ry \ln \frac{k}{y}$ où r et k sont des constantes positives.
   (a) Résoudre cette équation en choisissant comme fonction inconnue $u = \ln \frac{y}{k}$.
   (b) Etudier la solution $t \mapsto N(t)$ et représenter cette fonction avec $N_0 = 19,34$ g, $r = 0,0344$ g/jour et $k = 762,54$ g.
   Remarques :
   - La courbe obtenue est également une sigmoïde.
   - Elle décrit la croissance de rats musqués (S.Charles, Université de Lyon1).

Exercice 13 - *Ressort amorti.*

On veut étudier le comportement d'un système masse-ressort-amortisseur. On note $m > 0$ la masse et $y(t)$ l'allongement du ressort à l'instant t. Si on note $k > 0$ la raideur du ressort et $c \geq 0$ le coefficient d'amortissement, la force de rappel du ressort est donnée par $F_r = -ky$ et la force d'ammortissement est $F_a = -cy'$. En appliquant la loi du mouvement de Newton on obtient l'équation différentielle suivante sur l'allongement du ressort :

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

On complète cette équation par la condition initiale : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. Quelle est la signification physique de la donnée initiale que l'on a imposée ?
2. Résoudre l'équation dans le cas où il n'y a pas d'amortissement ($c = 0$) et en déduire pourquoi la quantité $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ est appelée *pulsation propre* du système.
3. Dans le cas où $c > 0$, on définit le *taux d'amortissement* $\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$. Donner l'expression de l'élongation y du ressort en distinguant les cas $\zeta < 1$, $\zeta = 1$ et $\zeta > 1$, et tracer l'allure de la courbe $t \mapsto y(t)$ dans chacun des cas.