Université de Versailles Saint Quentin
MA100bio
Année 2017–2018

Feuille de TD 1 : Fonctions logarithme, exponentielle, sinus et cosinus

A. Des calculs pour s'entraîner

Exercice 1 - *Rappels de certaines propriétés.*

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $e^{3x+2} = 2$,
   (b) $\ln(4x-3) = \ln(2x-1)$,
   (c) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$,
   (d) $e^{3x^2+5x+1} = -2$,
   (e) $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
   (f) $\sin(2x) = \sin x$.
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   (a) $e^{2x-1} \leq 2$,
   (b) $\ln(3x+5) \leq \ln(2x+1)$,
   (c) $\sin\left(\frac{x}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Dériver les fonctions suivantes définies sur I par :
   (a) $g(x) = (x^2+3x+1)e^x, \quad I = \mathbb{R}$
   (b) $h(x) = \frac{e^x+5}{x+3}, \quad I = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
   (c) $i(x) = e^{3x+5}, \quad I = \mathbb{R}$
   (d) $j(x) = x\ln(3+\sqrt{x}), \quad I =]0, +\infty[$
   (e) $u(x) = \sin^3(x), \quad I = \mathbb{R}$
   (f) $v(x) = \tan x, \quad I = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
4. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 3x - x^2$
   (b) $\lim\limits_{x \to -3^+} (x+3)\ln(x+3)$

Exercice 2 - *Études de fonctions avec la fonction exponentielle.*

1. Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4(x+1)e^{-x}$ (variations et limites en $+\infty$ et $-\infty$).

2. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ (variations et limites).

Exercice 3 - *Études de fonctions avec la fonction logarithme.*

1. Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + x - x^2$ (variations et limites en 0 et $+\infty$).

2. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = (4x-2)\ln(2x-1) + 6x$. (variations et limites).

Exercice 4 - *Étude de fonction avec les fonctions sinus et cosinus.*
Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par
$f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x)$.

B. Quelques applications

Exercice 5 -
Soit $x \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'écriture décimale de x possède n chiffres.

2. Applications :

   (a) Donner le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 12^{253}.

   (b) Donner le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $2^{74207281} - 1$ (plus grand nombre premier connu à ce jour et découvert le 7 janvier 2016).

Exercice 6 -
Un décibel (dB) est une unité servant à exprimer l'intensité acoustique d'un son. Une vibration sonore se mesure ainsi par sa fréquence et donc son intensité I exprimée en W/m^2, et le décibel est quant à lui, utilisé pour exprimer le rapport de deux intensités

acoustiques. On définit le nombre de décibels (dB), que l'on note N, engendré par une vibration sonore d'intensité I, par

$$N = 10\log(\frac{I}{I_0}),$$

où I_0 est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine : I_0 est voisin de $10^{-12} W/m^2$.

1. Que vaut N lorsque $I = I_0$? $I = 10I_0$ (c'est-à-dire un son "10 fois plus fort") ? $I = 100I_0$?

2. Le chuchotement discret de deux étudiants en classe est voisin de 20 dB. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par ces deux étudiants par rapport à I_0 ? Même question pour une conversation "normale" de deux personnes, émettant 50 dB.

3. On dit que le seuil de douleur est de 120 dB. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à I_0 ?

4. Le son en discothèque est souvent de 110 dB. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à I_0 ?

5. Dans un supermarché vous êtes face à deux lave-vaisselles. Le produit A fait un bruit mesuré à 39 dB alors que le produit B est mesuré à 36 dB. Vous discutez avec un commercial en lui disant que vous préférez la machine B car moins bruyante, mais ce vendeur qui doit absolument écouler son stock de machine A vous répond : “ Oh ! Pour 3 petits décibels, ça ne change pas grand chose ”. En calculant le rapport des intensités, trouver un argument à opposer au vendeur.

Exercice 7 -

On considère qu'après injection intramusculaire, la concentration dans le sang d'un médicament à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$C(t) = C_0(1 - e^{-kt})$$

où k est une constante dépendant de l'individu et C_0 la concentration maximale (dans une unité choisie).

On veut déterminer les constantes k et C_0 pour un individu donné afin de déterminer les doses à lui administrer.

Pour cela, après une injection initiale on effectue 3 mesures de concentration aux instants t_1, t_2 et t_3 avec $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta$.

1. Déterminer en fonction de Δ et des 3 concentrations observées (à l'aide de prises de sang) C_1, C_2 et C_3 la valeur de k puis celles de C_0 et t_1. *Indication :* commencer par calculer $\dfrac{C_2 - C_1}{C_3 - C_2}$.
   Dans toute la suite, on prendra : $\Delta = 1$ heure, $C_1 = 1$, $C_2 = 6,7$ et $C_3 = 8,8$.

2. En déduire alors la valeur approchée de k en unités par heure à $0,001$ près, puis la valeur approchée de C_0 à $0,1$ près et enfin celle de t_1.

3. Les médecins savent que le médicament fait effet à partir du moment où la concentration dans le sang est de 9 unités. Maintenant que les constantes k et C_0 de ce patient sont connues, au bout de combien de temps le médicament commencera-t-il à faire effet ?

Exercice 8 - *Courbe et croissance logistique.*

1. Dans un modèle de croissance en milieu illimité d'une population comprenant $N(t)$ individus, on suppose que le taux de croissance absolu $N'(t)$ est proportionnel à la population : $N'(t) = rN(t)$, c'est-à -dire que la fonction N vérifie sur $[0, +\infty[$ l' équation $y'(t) = ry(t)$ (E_1) dont l'inconnue y désigne une fonction du temps. On dira que N est solution de l'équation différentielle (E_1).
   (a) Vérifier que la fonction N définie sur $[0, +\infty[$ par $N(t) = N_0 e^{rt}$ est solution de (E_1)
   (b) Que peut-on dire concernant l'évolution de la population au bout d'un temps "très long" ?
2. Pour un milieu limité, F.Verhulst a proposé en 1838 comme modèle d'évolution d'une population la relation :

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{a-rt}}$$

   où $N(t)$ est la population au temps t.

   K, a et r sont des constantes ; a est déterminé par $N_0 = \dfrac{K}{1 + e^a}$ où N_0 est la population initiale et l'on peut supposer $a > 0$.

   (a) Pourquoi peut-on supposer que K et r sont des nombres strictement positifs ?
   (b) Etudier les variations de N en fonction de t et donner l'allure de sa représentation graphique. Expliquer pourquoi K est appelé *charge biotique.*
   (c) Vérifier que N vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = r\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) y(t),$$

   d'inconnue y, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $N'(t) = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) N$. Interpréter ce résultat.